

Cálculo Diferencial

Derivadas e aplicações

1. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $y = \frac{3}{(x-1)^2}$

b) $y = \sin(x^2) + \sin^2(x)$

c) $y = 3^{\sqrt{2-x}}$

d) $y = \ln(\sec(x+1))$

e) $y = e^{\operatorname{cosec}(x^3)}$

f) $y = x^{x^2}$

g) $y = \arccos(\sin(x^2+1))$

h) $y = \arcsen^2(\sqrt{x+1})$

i) $y = \operatorname{arctg}(\ln(\sqrt{x^2+1}))$

j) $y = (2x^2-1) \arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2}$

2. Considere a função $f(x) = x \log_2 \left(\frac{1}{x^2} \right)$.

a) Mostre que $f(x) = -2x \log_2(x)$;

b) Calcule $\frac{df}{dx}$.

3. Escreva equações das rectas tangente e normal à curva representativa da função $y = 2 \operatorname{arccotg}(3x) + \pi$ no ponto de abscissa $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Escreva equações das rectas tangente e normal à curva representativa da função $y = \arcsen(1-2x)$ no ponto de ordenada $\frac{\pi}{6}$.

5. Escreva equações das rectas tangente e normal à curva representativa da função $y = (\sqrt{x+1})^{\sec(x)}$ no ponto de intersecção da curva com o eixo OY.

6. Considere a função $f(x) = \arccos(3x-2)$. Determine as coordenadas do ponto pertencente à curva representativa da função f em que a recta tangente à curva é paralela à recta $y+3x+4=0$.

7. Considere a função $f(x) = x + \ln(x^2+1)$. Escreva equações das rectas tangente e normal à curva representativa da função f no ponto em que a função possui derivada nula.

8. Considere as funções $f(z) = \ln(z)$, $g(x) = \sec(x)$ e $h(t) = \operatorname{arctg}(t)$.

a) Calcule $\frac{df}{dz}$, $\frac{dg}{dx}$ e $\frac{dh}{dt}$;

b) Utilizando os resultados obtidos na alínea anterior e usando o teorema da derivada da função composta, calcule a derivada da composta das funções indicadas

i) $y = f(z)$ e $z = g(x)$, $\frac{dy}{dx}$

ii) $y = f(z)$ e $z = h(t)$, $\frac{dy}{dt}$

iii) $y = f(z)$, $z = g(x)$ e $x = h(t)$, $\frac{dy}{dt}$

9. Aplicando o teorema da derivada da função composta, calcule a derivada da composta das funções indicadas

a) $y = \sec(u^2 + 1)$ e $u = \sqrt{x^2 - 1}$, $\frac{dy}{dx}$

b) $y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x - 1)$ e $x = 1 + \cotg(2 - t)$, $\frac{dy}{dt}$

c) $u = x^{\operatorname{sen}(x)}$ e $x = e^t + \pi - 1$, $\frac{du}{dt} \Big|_{t=0}$

10. Aplicando o teorema da derivada da função composta, calcule a derivada da composta das funções indicadas

a) $w = e^{-2z}$, $z = \ln\left(\frac{1}{y}\right)$ e $y = 1 + \frac{1}{2} \cos(2x)$, $\frac{dw}{dx}$

b) $y = \ln\left(\frac{1}{1 - z}\right)$, $z = \operatorname{sen}^2(u)$ e $u = \operatorname{arctg}(2t)$, $\frac{dy}{dt}$

c) $y = \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{arcsen}(2 - x)$, $x = 2e^{-2w}$ e $w = \ln(\sqrt{t + 1})$, $\frac{dy}{dt} \Big|_{w=0}$

11. Aplicando o teorema da derivada da função inversa, calcule a derivada da inversa das funções indicadas

a) $y = -3 \operatorname{arccotg}(1 + 2x)$

b) $y = \ln\left(\sqrt[3]{x^2} + 1\right)$, com $x \geq 0$

12. Considere as seguintes funções definidas na forma paramétrica. Calcule a respectiva derivada

a) $\begin{cases} x = t + \cos(t) \\ y = 4 \operatorname{sen}(t), t \in]\frac{\pi}{2}, 2\pi[\end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \frac{2}{t + 1} \\ y = 4 \ln(t + 1), t \in]1, +\infty[\end{cases}$

13. Para cada função, determine a derivada indicada:

a) $y = \operatorname{arctg}(x)$ $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=1}$

b) $z = t^2 \ln(t)$ $\frac{d^4z}{dt^4}$

14. Considere a função $\begin{cases} x = 15t + 5 \\ y = -5t^2 + 15t + 10, t \in [0, 2\pi] \end{cases}$. Calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$

15. Considere a função $f(x) = x^2 - x$.

a) Determine as expressões da variação e da diferencial da função f ;

b) Indique as expressões para a variação e a diferencial da função f no ponto de abscissa 10;

c) Admita que há uma variação da variável independente de um décimo, ou seja, que $\Delta x = \frac{1}{10}$. Quais os valores da variação da variável independente y e da diferencial dy ?

16. A medida do raio de um círculo é 3 cm com uma margem de erro de 0,1 cm. Estime o erro propagado ao calcular a área e o perímetro do círculo.
17. Considere a função $y = \sqrt[3]{x}$. Calcule uma aproximação para $\sqrt[3]{8.3}$.
18. Calcule um valor aproximado para $\ln(0.97)$.
19. Considere a função $f(x) = 5 - \frac{1}{2}e^{-x}$.
- Indique a expressão analítica da função inversa da função f ;
 - Determine o domínio e o contra-domínio da função $g(x) = -|1 + f^{-1}(x)|$;
 - Considere as funções $z = \ln(\sqrt{t})$, $t = \cos(10 - 2y)$ e $y = f(x)$. Aplicando a derivada da função composta, mostre que a diferencial da função $z = h(x)$ é dada por $dz = \frac{1}{2}e^{-x} \operatorname{tg}(e^{-x})dx$;
20. Considere a curva definida pelas equações paramétricas $\begin{cases} x = \ln(\operatorname{tg}(t)) \\ y = -\arcsen(\cos(t)), t \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$.
- Escreva a diferencial da função $y = f(x)$;
 - Determine a equação da recta tangente à curva no ponto em que esta é paralela à recta de equação $x - 2y + 1 = 0$;
 - Calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$ e $\frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dy} \right)$.

Soluções

Derivadas e aplicações

- $y' = -\frac{6}{(x-1)^3}$
 - $y' = 2x \cos(x^2) + 2\operatorname{sen}(x) \cos(x)$
 - $y' = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} 3^{\sqrt{2-x}} \ln(3)$
 - $y' = \operatorname{tg}(x+1)$
 - $y' = -3x^2 \operatorname{cosec}(x^3) \cotg(x^3) e^{\operatorname{cosec}(x^3)}$
 - $y' = x^{x^2+1} (2 \ln(x) + 1)$
 - $y' = -2x$
 - $y' = \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{-x}} \arcsen(\sqrt{x+1})$
 - $y' = \frac{x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{1+\ln^2(\sqrt{x^2+1})}$
 - $y' = 4x \arcsen(x)$
- $\frac{df}{dx} = -\frac{2}{\ln(2)} - 2 \log_2(x)$
- $y = -\frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{8\pi}{3}, y = \frac{2}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{8\pi}{3}$
- $y = -\frac{4\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{6}, y = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{6}$
- $y = \frac{1}{2}x + 1; y = -2x + 1$

$$6. \left(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$7. y = -1 + \ln(2), x = -1$$

$$8. a) \frac{dy}{dz} = \frac{1}{z}, \quad \frac{du}{dx} = \sec(x)\operatorname{tg}(x), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$b) \quad i) \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(x)$$

$$ii) \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\operatorname{arctg}(t)} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

$$iii) \frac{dy}{dt} = \frac{1}{u} \Big|_{u=\sec(x)} \cdot \sec(x)\operatorname{tg}(x) \Big|_{x=\operatorname{arctg}(t)} \cdot \frac{1}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2}$$

$$9. a) \frac{dy}{dx} = 2x \sec(x^2)\operatorname{tg}(x^2) \quad c) \frac{du}{dt} \Big|_{t=0} = -\ln(\pi)$$

$$b) \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}$$

$$10. a) \frac{dw}{dx} = -\operatorname{sen}(2x)(2 + \cos(2x)) \quad c) \frac{dy}{dt} \Big|_{w=0} = \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = -4$$

$$b) \frac{dy}{dt} = \frac{8t}{1+4t^2}$$

$$11. a) \frac{1}{6} \operatorname{cosec}^2 \left(-\frac{y}{3} \right) \quad b) \frac{3}{2} e^y \sqrt{e^y - 1}$$

$$12. a) \frac{dy}{dx} = \frac{4 \cos(t)}{1 - \operatorname{sen}(t)} \quad b) \frac{dy}{dx} = -2(t+1)$$

$$13. a) -\frac{1}{2} \quad b) -\frac{2}{t^2}$$

$$14. -\frac{2}{45}$$

$$15. a) \Delta y = (2x-1)\Delta x + (\Delta x)^2 \quad dy = (2x-1)dx$$

$$b) \Delta y|_{x=10} = 19\Delta x + (\Delta x)^2 \quad dy|_{x=10} = 19dx$$

$$c) \Delta y|_{x=10, \Delta x=\frac{1}{10}} = \frac{191}{100} \quad dy|_{x=10, \Delta x=\frac{1}{10}} = \frac{19}{10}$$

$$16. dA = \frac{3\pi}{5} \approx 1,885 \quad dP = \frac{\pi}{5} \approx 0,628$$

$$17. \sqrt[3]{8.3} \approx \frac{81}{40}$$

$$18. \ln(0.97) \approx -\frac{3}{100}$$

$$19. a) f^{-1}(x) = -\ln(10-2x)$$

$$b) D =]-\infty, 5[\quad D' =]-\infty, 0]$$

$$20. a) dy = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2t)dx$$

b) $y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}$

c) $\frac{1}{4}\text{sen}(4t) \quad -2\text{cotg}(2t)$